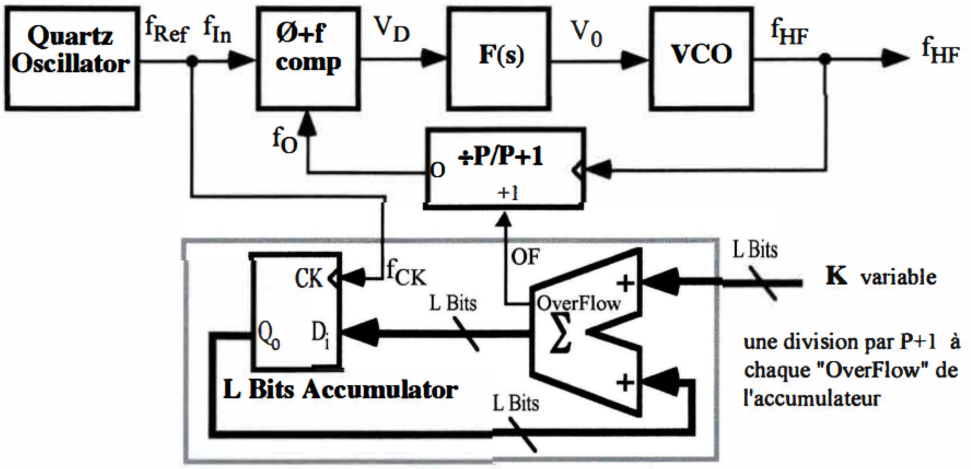
Synthèse de fréquence à PLL avec division fractionnaire

Avec une boucle PLL à diviseur fractionnaire, on veut effectuer une synthèse de fréquence agile couvrant une gamme de 861 MHz à 875 MHz par pas de 1 kHz ou plus petits.



1)

Donner la relation f_{HF} en fonction de f_{Ref}, P, K et L lorsque la PLL est verrouillée et stabilisée.

2)

La féquence de travail maximum de l'accumulateur et du comparateur de phase est limitée à $f_{logic,max} = 30$ MHz.

On a le choix entre trois "Dual Modulus Prescaler" : a) P = 16, b) P = 32 et c) P = 64.

Seul le prescaler b) convient à cette application. Justifier ce choix et dire pourquoi a) , respectivement c), ne conviennent pas (justifications avec valeurs numériques).

3)

Avec le prescaler P = 32, déteminer la plage de fréquence $f_{Ref,min}$ $f_{Ref,max}$ tolérable pour le quartz, et le nombre minimum de bits L_{min} nécessaire pour l'accumulateur.

4)

Avec P = 32, L = 20 et f_{Ref} = 26.800 MHz ± 1 ppm, déterminer la plage de fréquence totale que ce synthétiseur peut couvrir et sa résolution effective.

5)

Quel est l'incrément ΔK à imposer pour passer d'un cannal au suivant, sachant qu'ils sont espacés de 25 kHz ?

6)

Quelles sont les deux principales sources d'imprécision de la fréquence absolue générée (estimations chiffrées)?

7)

Le comparateur de phase-fréquence logique avec $K_D = 5/4\pi$ V/rad

Le VCO est spécifié linéaire entre: $f_{HF} = 850$ MHz à $V_0 = 1$ V
et $f_{HF} = 890$ MHz à $V_0 = 5$ V

Dimensionner le filtre intégrateur de degré 1 permettant d'obtenir un temps d'établissement de la boucle t_s d'environ 100 μs, avec un amortissement optimal $\xi = 1$.

Solution

1) Relation entre f_{HF}, f_{ref}, P, K et L

Dans la structure fractionnaire :

- Le VCO oscille à la fréquence f_{HF}.
- Cette fréquence est divisée par un **dual-modulus prescaler** de rapport instantané P ou $P+1$.
- Le choix entre P et $P+1$ est piloté par l'overflow de l'accumulateur sur L bits, qui ajoute la valeur K à chaque front d'horloge.

Sur une période de 2^L coups d'horloge :

- L'accumulateur déborde exactement K fois.
- Donc, pendant K cycles, on divise par $P+1$, et pendant $2^L - K$ cycles, on divise par P.

Le **rapport de division moyen** vaut donc :

$$N_{\text{moy}} = \frac{(2^L - K)\,P + K\,(P+1)}{2^L} = P + \frac{K}{2^L}.$$

La fréquence appliquée au comparateur de phase-fréquence est alors :

$$f_0 = \frac{f_{HF}}{N_{\text{moy}}} = \frac{f_{HF}}{P + K/2^L}.$$

Quand la PLL est verrouillée, on a $f_0 = f_{ref}$. Donc :

$$f_{ref} = \frac{f_{HF}}{P + K/2^L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{HF} = f_{ref}\left(P + \frac{K}{2^L}\right)}.$$

2) Choix du prescaler $P \in \{16, 32, 64\}$ (limite logique 30 MHz)

On impose deux contraintes :

1. **Couverture de la bande 861–875 MHz.**
   Pour un P donné et un quartz f_{ref} fixe, la PLL peut générer les fréquences dans l'intervalle :

   $$f_{HF,min} \approx P\,f_{ref}, \qquad f_{HF,max} \approx (P+1)\,f_{ref}.$$

   On doit pouvoir couvrir toute la bande 861–875 MHz :

   $$P\,f_{ref} \le 861\ \text{MHz}, \qquad (P+1)\,f_{ref} \ge 875\ \text{MHz}.$$

   Donc f_{ref} doit vérifier :

   $$\frac{875}{P+1} \le f_{ref} \le \frac{861}{P}.$$

2. **Limite de fréquence logique**
   Le comparateur de phase et l'accumulateur travaillent à f_{ref} (ou à la fréquence divisée, du même ordre). Il faut :

   $$f_{ref} \le f_{\text{logic,max}} = 30\ \text{MHz}.$$

a) Cas $P = 16$

Intervalle possible pour f_{ref} :

$$f_{ref} \in \left[\frac{875}{17}, \frac{861}{16}\right] = [51.5, 53.8]\ \text{MHz}.$$

Cet intervalle est **entièrement supérieur à 30 MHz**, donc :

$$f_{ref} > 30\ \text{MHz} \quad \Rightarrow \quad \text{nécessite accumulateur et comparateur de phase trop rapides} \quad \Rightarrow P = 16\ \text{impossible}.$$

b) Cas $P = 32$

$$f_{ref} \in \left[\frac{875}{33}, \frac{861}{32}\right] = [26.5, 26.9]\ \text{MHz}.$$

- Cet intervalle **contient** des valeurs réalisables (26–27 MHz),
- et $f_{ref} < 30$ MHz → la logique reste dans les limites.

Donc $P = 32$ **est acceptable**, et permet de couvrir toute la bande.

c) Cas $P = 64$

$$f_{ref} \in \left[\frac{875}{65}, \frac{861}{64}\right] = [13.46, 13.45]\ \text{MHz}.$$

L'intervalle est **vide** (la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure), ce qui reflète le fait que le rapport max réalisable $(P+1)/P = 65/64 \approx 1.0156$ est **trop faible** pour couvrir le rapport de la bande

$$\frac{875}{861} \approx 1.01626 > \frac{65}{64}.$$

Donc avec $P = 64$, la variation de N entre 64 et 65 ne suffit pas pour balayer 861–875 MHz.

Conclusion :

- $P = 16$: bande couverte, mais f_{ref} > 30 MHz → logique trop rapide.
- $P = 64$: logique OK, mais bande **pas entièrement couverte**.
- $P = 32$: **les deux contraintes sont satisfaites** → c'est le seul choix possible.

3) Avec $P = 32$: plage admissible de f_{ref} et nombre minimal de bits $L_{\min}$

3.1 Plage admissible pour f_{ref}

Pour $P = 32$:

$$f_{ref,\min} = \frac{875 \text{ MHz}}{33} \approx 26.52 \text{ MHz},$$
$$f_{ref,\max} = \frac{861 \text{ MHz}}{32} \approx 26.91 \text{ MHz}.$$

Donc le quartz doit avoir une fréquence dans l'intervalle :

$$\boxed{f_{ref} \in [26.5,\ 26.9] \text{ MHz (environ)}}.$$

3.2 Nombre minimal de bits $L_{\min}$

Le plus petit pas de fréquence que peut générer la PLL est :

$$\Delta f_{\min} = \frac{f_{ref}}{2^L},$$

car on modifie K par pas de 1 → variation de N de $1/2^L$.

On veut des **pas de 1 kHz ou plus petits** sur f_{HF}, donc :

$$\Delta f_{\min} = \frac{f_{ref}}{2^L} \leq 1 \text{ kHz}.$$

Pour être sûr, on prend la **pire valeur**, c'est-à-dire $f_{ref,\max} \approx 26.9$ MHz :

$$\frac{26.9 \times 10^6}{2^L} \leq 10^3 \quad \Rightarrow \quad 2^L \geq 2.69 \times 10^4.$$

Or

- $2^{14} = 16\,384 < 26\,900$,
- $2^{15} = 32\,768 > 26\,900$.

Donc :

$$\boxed{L_{\min} = 15 \text{ bits}}.$$

4) Avec $P = 32$, $L = 20$ et $f_{ref} = 26.8$ MHz

On prend maintenant :

- $P = 32$,
- $L = 20$ bits,
- $f_{ref} = 26.8$ MHz (tolérance ±1 ppm, qu'on traitera plus loin).

4.1 Plage de fréquence totale du synthétiseur

La division moyenne vaut toujours :

$$N = P + \frac{K}{2^{20}}, \quad K \in [0,\, 2^{20} - 1].$$

Donc :

- $N_{\min} = 32$,
- $N_{\max} = 32 + \frac{2^{20} - 1}{2^{20}} \approx 32.999999.$

Les fréquences correspondantes :

$$f_{HF,\min} = N_{\min} f_{ref} = 32 \times 26.8 \text{ MHz} = 857.6 \text{ MHz},$$

$$f_{HF,\max} \approx 32.999999 \times 26.8 \text{ MHz} \approx 884.4 \text{ MHz}.$$

Donc la bande théorique couverte est :

$$\boxed{f_{HF} \in [857.6,\ 884.4] \text{ MHz (environ)}}.$$

Elle englobe largement la plage spécifiée 861–875 MHz.

4.2 Résolution effective

Le pas minimal de fréquence (quand K varie de 1) est :

$$\Delta f_{HF} = \frac{f_{ref}}{2^{20}} = \frac{26.8 \times 10^6}{1\,048\,576} \approx 25.56 \text{ Hz}.$$

Donc la **résolution fréquentielle effective** du synthétiseur est :

$$\boxed{\Delta f_{HF} \approx 25.6 \text{ Hz}}.$$

5) Incrément ΔK pour des canaux espacés de 25 kHz

On veut maintenant des canaux espacés de :

$$\Delta f_{\text{canal}} = 25 \text{ kHz}.$$

On sait que :

$$f_{HF} = f_{ref}\left(P + \frac{K}{2^L}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta f_{HF} = f_{ref}\frac{\Delta K}{2^L}.$$

On impose $\Delta f_{HF} \approx 25$ kHz :

$$\Delta K = \frac{\Delta f_{\text{canal}}\, 2^L}{f_{ref}} = \frac{25\,000 \times 1\,048\,576}{26.8 \times 10^6} \approx 978.1.$$

Comme K doit être **entier**, on prend :

$$\boxed{\Delta K = 978}.$$

Cela donne un espacement réel très proche de 25 kHz (voir la partie suivante pour l'erreur).

6) Principales sources d'imprécision sur la fréquence absolue

6.1 Erreur de quantification due à la résolution fractionnaire

Le pas minimal est :

$$\Delta f_{HF} \approx 25.56 \text{ Hz}.$$

Or 25 kHz n'est pas un multiple entier de 25.56 Hz. On a choisi $\Delta K = 978$, ce qui donne un espacement réel :

$$\Delta f_{\text{réel}} = \Delta K \cdot \Delta f_{HF} \approx 978 \times 25.56 \text{ Hz} \approx 24.996 \text{ kHz}.$$

L'erreur par rapport aux 25 kHz idéaux est donc de l'ordre de quelques Hz (≈ 4 Hz).
De manière générale, l'erreur de quantification est **bornée par** $\Delta f_{HF}/2$:

$$\boxed{\text{Erreur de quantification} \lesssim \frac{\Delta f_{HF}}{2} \approx 12 \text{ Hz}.}$$

6.2 Erreur due à la précision du quartz

Le quartz est donné à :

$$f_{ref} = 26.800 \text{ MHz} \pm 1 \text{ ppm}.$$

Une erreur relative de 1 ppm sur f_{ref} se retrouve **à l'identique** sur f_{HF} (la PLL multiplie, mais la relative reste la même).

À 875 MHz, l'erreur absolue maximale vaut donc :

$$\Delta f_{HF,\text{quartz}} \approx 875 \text{ MHz} \times 10^{-6} \approx 875 \text{ Hz}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Erreur due au quartz} \approx \pm 875 \text{ Hz (ordre de grandeur).}}$$

7) Dimensionnement du filtre de boucle (intégrateur de degré 1)

- Comparateur de phase-fréquence logique :

$$K_D = \frac{5}{4\pi} \text{ V/rad}.$$

- VCO linéaire entre :
  - $f_{HF} = 850$ MHz à $V_0 = 1$ V,
  - $f_{HF} = 890$ MHz à $V_0 = 5$ V.

7.1 Gain du VCO

Variation de fréquence :

$$\Delta f = 890 - 850 = 40 \text{ MHz} \quad \text{pour} \quad \Delta V = 5 - 1 = 4 \text{ V}.$$

Donc :

$$K_{VCO} = \frac{\Delta f}{\Delta V} = \frac{40 \text{ MHz}}{4 \text{ V}} = 10 \text{ MHz/V}.$$

En rad/s/V :

$$K_{VCO} = 2\pi \times 10^7 \approx 62.8 \text{ Mrad/s/V}.$$

Comme la boucle travaille avec division par $N \approx 32.5$ (milieu de bande, $P = 32$ et $K/2^L \approx 0.5$), le gain effectif est :

$$K_0 = \frac{K_{VCO}}{N} \approx \frac{62.8 \times 10^6}{32.5} \approx 1.93 \times 10^6 \text{ rad/s/V}.$$

7.2 Modèle de la boucle et choix de ω_n

On utilise un **filtre actif intégrateur d'ordre 1** de type :

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{s\tau_1},$$

L'équation caractéristique de la boucle est de la forme :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

avec les identifications classiques :

$$\omega_n^2 = \frac{K_D K_0}{\tau_1}, \qquad 2\xi\omega_n = \frac{K_D K_0 \tau_2}{\tau_1}.$$

On souhaite :

- amortissement optimal $\xi = 1$,
- temps d'établissement $t_s \approx 100\ \mu\text{s}$.

Pour un système du 2ᵉ ordre pseudo-critique ($\xi \approx 1$), on peut prendre comme ordre de grandeur :

$$t_s \approx \frac{6}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n \approx \frac{6}{t_s} = \frac{6}{100 \times 10^{-6}} = 60\,000\ \text{rad/s}.$$

7.3 Calcul de τ_1 et τ_2

1. **Calcul de** τ_1 à partir de ω_n :

$$\omega_n^2 = \frac{K_D K_0}{\tau_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{K_D K_0}{\omega_n^2}.$$

   Numériquement :

$$\begin{aligned} K_D &\approx \frac{5}{4\pi} \approx 0.398\ \text{V/rad}, \\ K_0 &\approx 1.93 \times 10^6\ \text{rad/s/V}, \\ K_D K_0 &\approx 7.69 \times 10^5\ \text{rad/s}. \end{aligned}$$

   Donc :

$$\tau_1 \approx \frac{7.69 \times 10^5}{(6.0 \times 10^4)^2} \approx 2.1 \times 10^{-4}\ \text{s} = 214\ \mu\text{s}.$$

2. **Calcul de** τ_2 à partir de $\xi = 1$

   On a :

$$2\xi\omega_n = \frac{K_D K_0 \tau_2}{\tau_1} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\tau_2}{2}\omega_n.$$

   Pour $\xi = 1$:

$$\tau_2 = \frac{2}{\omega_n} = \frac{2}{60\,000} \approx 3.3 \times 10^{-5}\ \text{s} = 33\ \mu\text{s}.$$

En pratique, on choisira les valeurs de R et C du filtre pour obtenir ces constantes de temps (par exemple, $\tau_1 = R_1 C$, $\tau_2 = R_2 C$, suivant la topologie choisie).